Trabajo Práctico Nro. 5

Singularidades. Teorema de los residuos.

1. Hallar y clasificar las singularidades en $\mathbb{C}^*$ de:

   (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z+2)}$ (b) $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)(z+2)}$ (c) $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$

   (d) $f(z) = z\,\mathrm{ctg}(z)$ (e) $f(z) = \dfrac{z}{2+\operatorname{sen} z}$ (f) $f(z) = \dfrac{1}{z\,(1-\operatorname{ch} z)}$

   (g) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{\frac{1}{z}}-1}$ (h) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z\,(z-\pi)^2}$ (i) $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{e^{-2z}+9}$

   (j) $f(z) = \dfrac{1}{\mathrm{Log}(z^2-i)}$

2. Sea f una función holomorfa en un dominio D que tiene ceros $z_1, z_2, \cdots, z_k$ con multiplicidades $m_1, m_2, \cdots, m_k$ respectivamente. Mostrar que existe una función holomorfa g en D tal que $f(z) = (z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_k)^{mk} g(z)$.

3. Probar que f tiene un polo de orden menor o igual que $m \in \mathbb{N}$ en z_0, si y sólo si $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0.

4. Caracterizar las funciones analíticas en $\mathbb{C}$ según tengan en ∞ una singularidad evitable, un polo (de orden m) o una singularidad esencial.

5. ¿Existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}-\{1,5\})$ con un único cero simple, polos simples en $z=1$ y $z=5$ respectivamente, tal que $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 3$, y $\int_{|z|=2} f(z)\, dz = 3\pi i$?

6. Sean z_0 cero de orden m de g y cero de orden n de h y $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$. Probar:

   (a) Si $n > m$, f tiene un polo de orden $n-m$ en $z = z_0$.

   (b) Si $n \leq m$, z_0 es singularidad evitable de f. ¿Cómo se extiende f como función continua en z_0? (diferenciar los casos $n = m$ y $n < m$).

7. Sea $g : D \to \Omega$ holomorfa, tal que para w_0 en Ω, z_0 es raiz simple de la ecuación $g(z) - w_0 = 0$. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{w_0\})$ tal que w_0 es un polo de orden m de f. Si $h(z) = f(g(z))$, determinar el tipo de singularidad de h en z_0. ¿Y si z_0 es una raiz de multiplicidad k de la ecuación $g(z) - w_0 = 0$? Ejemplificar ambas situaciones.

8. Sea $f(z)$ una función que tiene solamente polos en un dominio D del plano complejo. Clasificar las singularidades de $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ en D.

9. Probar que si f es holomorfa para $|z| > R$ y su límite en infinito es cero, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| \leq \dfrac{c}{|z|^m}$ para $|z| > R$ y algún $c > 0$.

10. Para cada función f del Ejercicio 1, verificar si $\mathrm{Res}[f, 0]$ y de $\mathrm{Res}[f, \infty]$ están definidos y en tal caso, calcularlos.

11. (a) Probar que si f tiene un polo simple en z_0 y g es holomorfa en z_0 entonces $\mathrm{Res}[fg, z_0] = g(z_0)\mathrm{Res}[f, z_0]$.
    (b) Supongamos que f y g son dos funciones holomorfas y que z_0 es cero de orden k y de orden $k+1$ de f y g respectivamente. Probar que:
$$\mathrm{Res}[\frac{f}{g}, z_0] = (k+1)\frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k+1)}(z_0)}.$$
12. Hallar todas las funciones f que verifican: f tiene un polo doble con residuo igual a 3 en $z=0$; f tiene un polo simple con residuo igual a 7 en $z=1$ y f es acotada en un entorno del infinito.
13. Sea $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Indicar para qué valores de n la serie de Laurent de $f(z)$ tiene sólo términos de exponentes no negativos con radio de convergencia infinito.
    (b) Indicar para qué valores de n $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que z_0 es polo de orden k de $f(z)$. Hallar en ese caso la serie de Laurent en una vecindad de z_0.
    (c) Calcular $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ siendo C: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
    (d) ¿Qué tipo de singularidad tiene f en infinito? Hallar $\mathrm{Res}[f, \infty]$.
14. Calcular las integrales de las siguientes funciones a lo largo de los contornos que se indican recorridos con orientación positiva.
    (a) $f(z) = \pi\,\mathrm{sen}(\pi z)$ C: el cuadrado de vértices 0, 1, $1+i$ y i
    (b) $f(z) = \dfrac{\mathrm{sen}(3z)}{(z - \frac{\pi}{4})^2}$ C: el cuadrado de vértices $2-2i$, $2+2i$, $-2+2i$ y $-2-2i$
    (c) $f(z) = \dfrac{e^{-2z}}{e^{-2z} + 9} + z\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ C: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 9\}$
    (d) $f(z) = \dfrac{1}{z\,(1 - e^{-2iz})}$ C: $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1.5\}$
    (e) $f(z) = (1+z)(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}})$ C: $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$
    (f) $f(z) = \dfrac{(z-i)e^{1/z}}{z^2}$ C : $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = 2\}$
15. Calcular los posibles valores de
$$\int_{|z|=r} \left(|z-r|e^{|z|} + \frac{z\,e^z}{z^2 + a^2} \right) dz \quad (a > 0,\ r > 0,\ a \neq r)$$
16. Determinar si vale la siguiente igualdad:
$$\int_{|z|=\frac{5}{4}} \frac{1}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{z})}\,dz = \int_{|z|=\frac{3}{4}} \frac{1}{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{z})}\,dz \ + \ 4i$$

Cálculo de integrales reales mediante integración compleja.

17. Hallar el valor de las siguientes integrales reales usando integrales complejas.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+2\operatorname{sen} t)^2}$ (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{1-2a\cos t+a^2}\, dt,\ a\neq \pm 1$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos t}{5+4\cos t}\, dt$

18. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{10} x^p \operatorname{sen} x\ dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\, x^p\ dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$

(g) $\displaystyle\int_0^{1} x^p \ln x\ dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$ (h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^p \ln x\ dx,\ \forall\, p\in\mathbb{R}$

19. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales y de acuerdo a lo hallado, calcular el valor de la integral utilizando residuos.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2+1}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{1+x^2}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\,(1+x^2)}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen}\pi x}{(1+x^2)(x^2-2)}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2+e^2}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(4+x^2)}\, dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(2+x^2)^2}\, dx$ (i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-2x+2)^2}\, dx$

20. Sean S_1 y S_2 la intersección de $B(0,R)$ con el semi-plano superior y con el primer cuadrante respectivamente y $C_i = \partial S_i$ para $i = 1, 2$.

(a) ¿Es posible calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\, dx$ mediante integración compleja sobre C_1?

(b) Probar que

$$\int_0^{R} \frac{x}{x^4+1}\, dx - \int_R^{0} \frac{y}{y^4+1}\, dy + \int_{C_2} \frac{z}{z^4+1}\, dz = 2\pi i \sum_{z\in P} \operatorname{Res}\left[\tfrac{z}{z^4+1}\right].$$

donde P representa el primer cuadrante del plano.

(c) Obtener que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\, dx = \pi/4.$

21. Para todo $\omega \in \mathbb{R}$, comprobar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{i\omega x}}{x^4+1}\, dx = i\pi e^{-|\omega|/\sqrt{2}} \operatorname{sen}(\omega/\sqrt{2})$

y deducir los valores de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\omega x)}{x^4+1}\, dx$ y de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\omega x)}{x^4+1}\, dx$.

22. (a) Verificar la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad a > 0.$$

(Sugerencia: usar integración doble y coordenadas polares.)

(b) Obtener que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m^2x^2} \cos bx\; dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m} e^{-b^2/(4m^2)}, \quad m > 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

(Sugerencia: usar residuos y un contorno de forma rectangular adecuado.)